

Cours 3:

éléments finis 1D de degré 2

Méthode des EF

On reprends le pb du fléchissement d'une corde :

Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction u deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.1) \quad (\text{Pb 10.1})$$

On multiplie par une fonction v une fois continuellement dérivable sur $[0, 1]$ et on intègre de 0 à 1:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties le premier terme, nous avons :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

NB: Si les 2 conditions aux limites (CL) portent sur $u'(x)$ en 0 et en 1, alors on conserve le terme $-u'(1)v(1) + u'(0)v(0)$ et on définit 2 fonctions, ϕ_0 centrée en 0 et ϕ_{N+1} centrée en 1, pour déterminer les 2 inconnues supplémentaire, approximations de u en $x = 0$. et en $x = 1$.

Méthode des EF

Formulation forte du pb:

Étant donné deux fonctions c et f continues sur $[0,1]$, trouver u doublement dérivable sur $[0,1]$ telle que:

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Formulation faible du pb: trouver u tel que pour tout v de V (de dimension infinie):

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Approximation de Galerkin: trouver u_h de V_h (de dimension finie) telle que pour tout v_h de V_h :

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx$$

Eléments finis 1D de degré 2

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $M + 1$ parties égales (M étant un entier positif), posons $h = 1/(M + 1)$, $x_i = ih$, avec $i = 0, 1, \dots, M + 1$ et $x_{i+1/2} = x_i + h/2$, avec $i = 0, 1, \dots, M$. On définit pour $i = 1, 2, \dots, M$, les fonctions suivantes :

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}; \end{cases}$$

et pour $i = 0, 1, \dots, M$, les fonctions suivantes :

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

Eléments finis 1D de degré 2

les fonctions ψ_i et $\psi_{i+1/2}$ sont telles que :

$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq j \leq M+1,$$

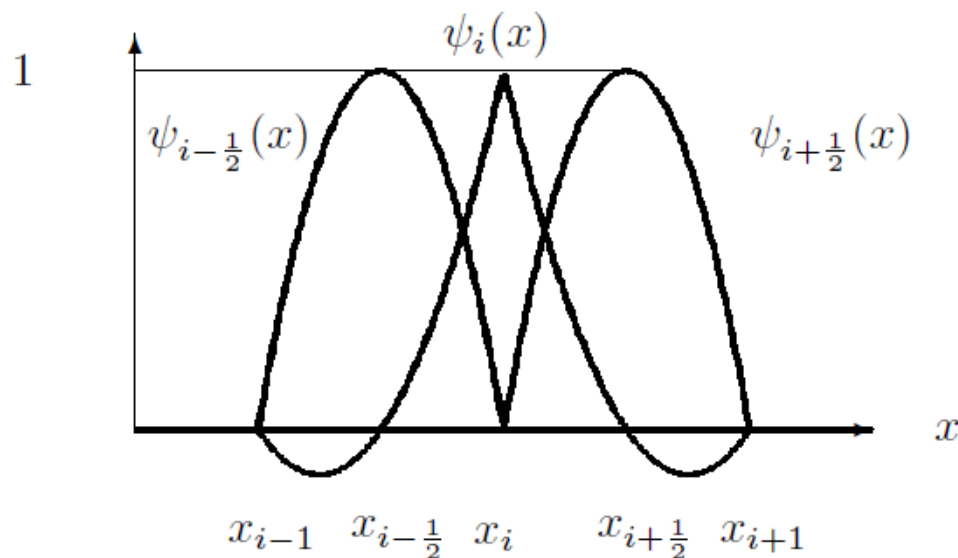
$$\psi_i(x_{j+\frac{1}{2}}) = 0, \quad 0 \leq j \leq M,$$

$\psi_i|_{[x_{j-1}, x_j]}$ est un polynôme de degré 2, $1 \leq j \leq M+1$;

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq j \leq M,$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq M+1,$$

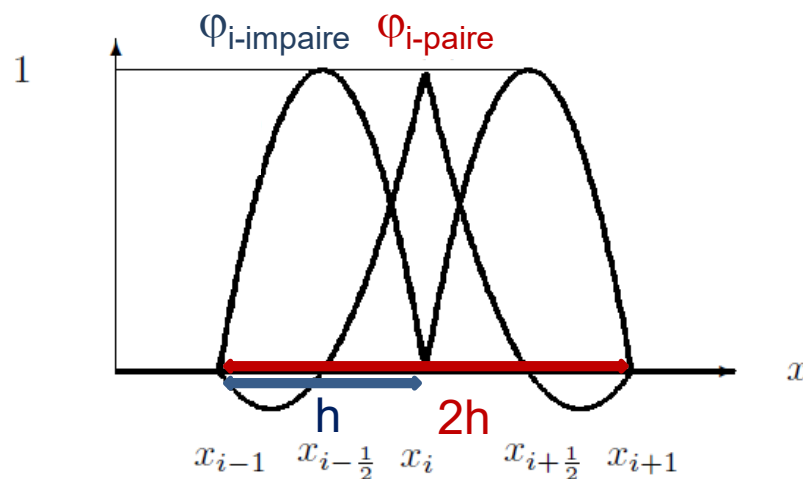
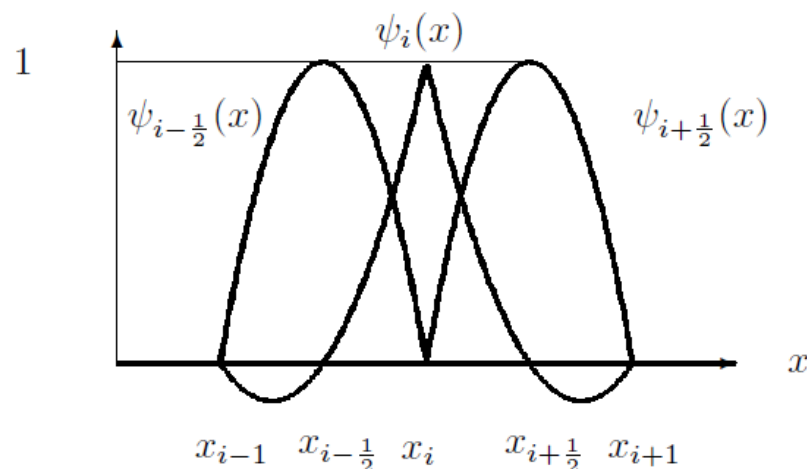
$\psi_{i+\frac{1}{2}}|_{[x_{j-1}, x_j]}$ est un polynôme de degré 2, $1 \leq j \leq M+1$.



Eléments finis 1D de degré 2

Si nous posons maintenant $N = 2M + 1$, $\varphi_1 = \psi_{1/2}$, $\varphi_2 = \psi_1$, $\varphi_3 = \psi_{3/2}$, $\varphi_4 = \psi_2$, $\varphi_5 = \psi_{5/2}$, $\varphi_6 = \psi_3$, ..., $\varphi_{2M} = \psi_M$, $\varphi_{2M+1} = \psi_{M+1/2}$, alors les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ appartiennent à V et sont linéairement indépendantes. Nous les choisissons pour engendrer l'espace V_h que nous appelons ici encore espace de type éléments finis. Nous dirons ainsi que :

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{M+1}$ sont les *nœuds principaux de la discrétisation*,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_M, x_{M+1}]$ sont les *éléments géométriques*,
- $x_{1/2}, x_{3/2}, x_{5/2}, \dots, x_{M+1/2}$ sont les *nœuds intérieurs aux éléments géométriques*,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type *éléments finis de degré 2* associées aux nœuds de la discrétisation.



Méthode des EF

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u(0) = 0 \text{ et } u(1) = 0$$

Approximation de Galerkin: trouver u_h de V_h (de dimension $N=2M+1$)
telle que pour tout v_h de V_h :

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx$$

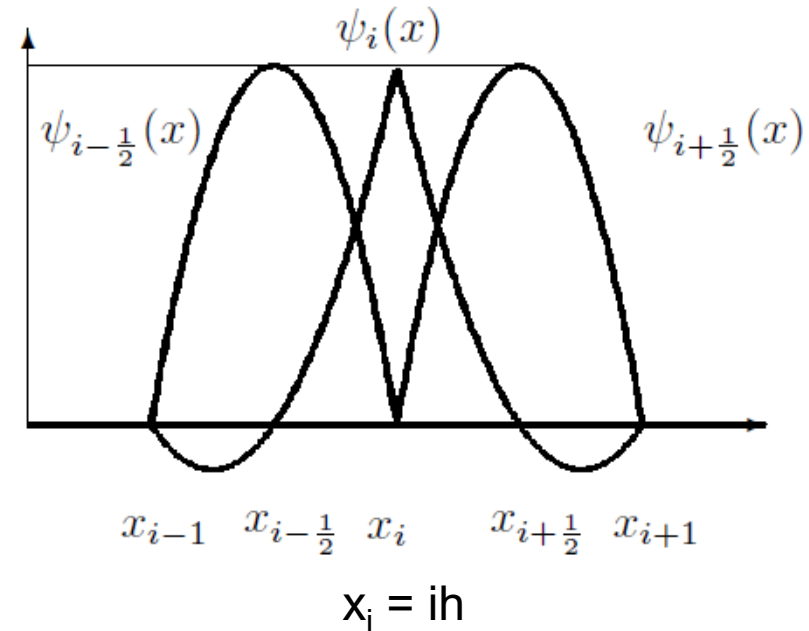
$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) \quad \text{et } v(x) = \varphi_j(x) \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } N = 2M+1$$

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x))dx = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} u_i = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = f_j, \quad \forall j=1, N$$

A est une matrice carrée $N \times N$ et $A_{ji} = A_{ij}$

système linéaire: $A\vec{u} = \vec{f}$

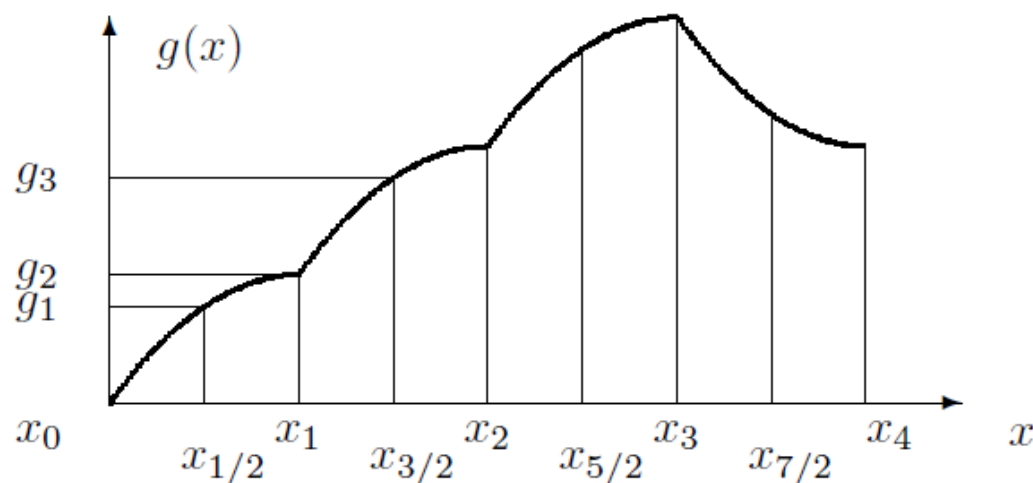


Eléments finis 1D de degré 2

Si $g \in V_h$, alors g est une combinaison linéaire des φ_i , i.e.

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x),$$

et le graphe de g est représenté dans la figure 10.7. En particulier nous remarquons, en vertu de (10.28) (10.29), que $g(x_j) = g_{2j}$, $1 \leq j \leq M$, que $g(x_{j+1/2}) = g_{2j+1}$, $0 \leq j \leq M$, que $g(0) = g(1) = 0$ et que g est un polynôme de degré 2 sur chaque élément géométrique.



$g(x)$ est l'interpolation
de degré 2 sur $[0, 1]$

Fig. 10.7 Graphe d'une fonction g élément de V_h dans le cas où $M = 3$.

Eléments finis 1D de degré 2

Théorème 10.4 *On suppose que $c(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$. Soit u la solution de (10.9) que nous supposons trois fois continûment dérivable. Si u_h est la solution de (10.10) lorsque V_h est engendré par les fonctions de base (10.26) (10.27), alors nous avons l'estimation d'erreur :*

$$|u - u_h|_1 \leq Ch^2, \quad (10.32)$$

où C est une constante indépendante de N (et donc de h).

avec $|g|_1 = \left(\int_0^1 (g'(x))^2 dx \right)^{1/2}$ la norme quadratique.

La méthode des EF de degré 2 est donc plus précise que la méthode des EF de degré 1: l'erreur entre solution exacte et solution numérique diminue comme h^2 (NB: $h = 1/(M+1) < 1$). Elle mène aussi à un système linéaire $Au = f$.

Cependant, elle est plus "lourde" numériquement car A est pentadiagonale et le vecteur u des inconnues a $N = 2M+1$ composantes (M valeurs aux noeuds principaux et $M+1$ valeurs aux noeuds intérieurs).

Eléments finis 1D de degré 2

La méthode des EF de degré 2 mène à la résolution d'un système linéaire

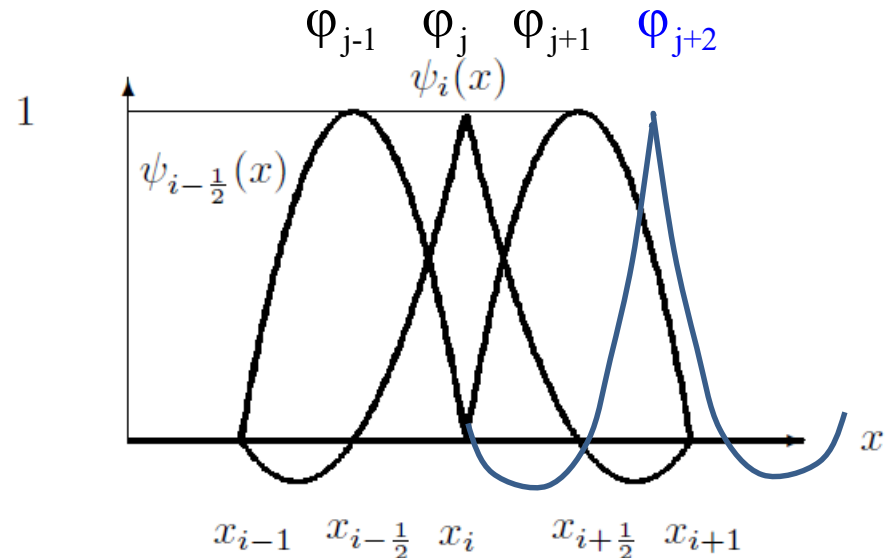
du style $A\vec{u} = \vec{f}$ avec u et f des N -vecteurs et A une matrice symétrique carrée $N \times N$ définie par:

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

Comme les supports de ϕ_j , ϕ_{j+1} et ϕ_{j+2} se chevauchent et que A est symétrique, A est pentadiagonale : sa demi-largeur de bande est 3.

On remarque que pour un pas d'espace h constant et pour $c = 0$., le terme A_{ii} est différent suivant que i est paire ou impaire

$$A_{ii} \text{ (i paire)} = \int_0^1 (\varphi'_i)^2 dx \neq A_{ii} \text{ (i impaire)} = \int_0^1 (\varphi'_i)^2 dx$$

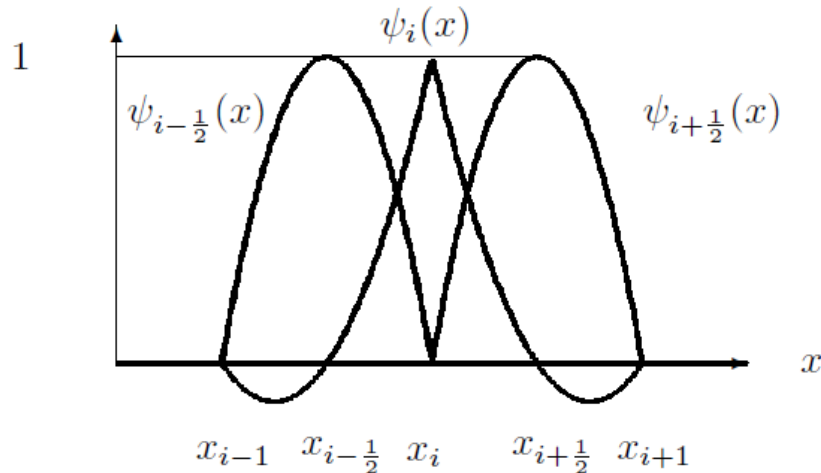


Eléments finis 1D de degré 2

Exo3a:

Calculez le terme A_{ii} pour i paire puis pour i impaire avec un pas d'espace h constant et dans le cas où $c = 0$.

$$A_{ii} = \int_0^1 (\varphi_i')^2 dx$$



Méthode des EF

Exo 3b:

Étant donné deux fonctions c et f continues sur $[0,1]$, trouver u doublement dérivable sur $[0,1]$ telle que:

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

Comme la condition aux limites (CL) en $x = 0$ porte sur $u'(x)$, on définit la fonction ϕ_0 centrée en 0 pour déterminer l'inconnue $u(0)$ approximation de u en $x = 0$.

fonction $\phi_0(x)$ vaut avec un pas h constant: $\phi_0(x) = \frac{2(x-h)(x-h/2)}{hh}$ sur $[0,h]$

Ecrire les formulations faibles puis de Galerkin avec des éléments quadratiques et définir A et f :

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

En prenant $c(x)=0$, montrer que $A_{00} = 7/3h$, $A_{01} = -8/3h$ et $A_{02} = 1/3h$.

Ecrire la première ligne du système linéaire puis faire tendre h vers 0 pour retrouver la C.L. en $x = 0$.

